

# パートナーとして容認できないメンバーを許す 分散安定結婚問題の一考察

金城 秀樹

沖縄大学法経学部法経学科

【あらまし】 安定結婚問題は、男女  $n$  人ずつの二つの集合と、各メンバーが異性を好きな順にならべたプリファレンスリストを与えられたときに、安定な  $n$  組のペアを求める問題である。本問題に対しては、安定マッチングを求める多項式時間アルゴリズムの存在が知られている。また、この問題の条件緩和として、プリファレンスリストに異性全体を書かないことを許す場合や、異性の希望順位に同順位を許す場合などについて検討され、それぞれの場合で安定マッチングが得られる事が知られている。

本研究では、安定結婚問題の自律分散環境への適用に始まり、参加メンバーの自律的な判断により、現在の安定マッチングから異なる安定マッチングへ組合せの構成を変化することが可能であるマッチング再構成と呼ばれる安定マッチングの遷移手法の提案を行った。

本稿では、分散安定結婚問題の実問題への適用を考慮し、パートナーとして受け入れることができないメンバーとペアにならないことを許した場合、分散 Gale-Shapley アルゴリズムによって安定マッチングを得ることができるか、また、マッチング再構成によって任意の安定マッチングから異なる安定マッチングへ導くことができるかについて考察する。

## A Study on Distributed Stable Marriage Problem with Unacceptable Partners

Hideki Kinjo

Faculty of Law & Economics, Okinawa University

**Abstract** Instance of the original stable marriage problem consists of men group and women group having  $n$  members each other. Each member submits a preference list in which he/she writes all the members of the opposite sex in the strict order. The problem is known to be solved in polynomial time. Considering practical applications, relaxations for the preference lists have been introduced. In the previous works, it has been proposed that stable marriage problem was applied to autonomous distributed environment, and introduced autonomous mechanism for exchanging partners, called matching reconstruction. In this paper, I consider, one of relaxations that to allow unacceptable partners.

## 1 はじめに

安定結婚問題<sup>[1]</sup>とは、 $n$ 人ずつの二つのグループ（男女のグループ）のメンバーと、各メンバーが持つ相手（異性）グループ  $n$  人全員を全順序で並べたリストをもとに、安定な  $n$  組のペアを求める問題である。この問題はマッチング問題の一種であり、どのような手順（アルゴリズム）で安定な組み合わせを求めるのか、どのような安定な組み合わせを解とするのかを問題としている。本問題は、1962年に Gale と Shapley によって紹介された。彼らは男性優先解（もしくは女性優先解）と呼ばれる安定マッチングを求めるアルゴリズムを提案した<sup>[1]</sup>。しかし、このアルゴリズムで得られる解は、与えられた例題において、通常複数存在する安定マッチングの中で、二つあるグループの片方の構成要素には最も有利な安定マッチングとなるが、もう一方のグループの構成要素にとっては最悪の安定マッチングとなるという性質をもつことが知られている<sup>[1,2]</sup>。

安定結婚問題では、各メンバーの希望リストに異性  $n$  人全員を記入する必要がある、加えて、その  $n$  人は全順序で記入されなければならない。しかしながら、実際の組み合わせを考慮した場合、異性メンバーには、パートナーとして受け入れることが困難なメンバーが存在する場合や、順序付けが困難な場合もあり、特に人数が多くなると上記の制約通りに希望リストを記入することは難しくなる。実問題への適用から、それぞれのケースについて研究が行われ、安定マッチングが得られることが知られている<sup>[2]</sup>。また、両方の条件緩和を同時に行った場合について研究が行われている<sup>[9]</sup>。

本研究では、計算機科学、OR の基本問題のひとつとして扱われてきた安定結婚問題を分散問題として捉え、それによって派生する諸問題を検討してきた。注目を集めている研究分野の1つである、複数の自律移動ロボットによる協調作業<sup>[3,4,5]</sup>では、自律分散システムを構成する自律移動ロボット等のノード同士の組み合わせが必要となることから、自律分散環境におけるマッチングゲームを考え、安定結婚問題における参加メンバーを分散システムにおける構成要素と捉え、分散環境に適用した分散安定マッチング問題を定義した<sup>[6,7]</sup>。加えて、マッチング再構成をより柔軟に実行できる環境として、任意のメンバーによってマッチング再構成が実行され、そのマッチング再構成の終了を待たずに、他のメンバーによりマッチング再構成を実行できる、つまり、複数のメンバーによる並行的なマッチング再構成の提案を行った<sup>[8]</sup>。

本稿では、2節で本研究の基礎となる安定結婚問題を紹介し、3節では、安定結婚問題を分散環境へ適用した分散安定結婚問題の定義及び分散安定結婚問題を解くアルゴリズムを示す。また、単一メンバーによる安定マッチングの再構成手法について述べる。4節では、分散安定結婚問題の問題例において、パートナーとして受け入れることが困難なメンバーを PL に記入しないことを許した場合に、安定マッチングを導くことができるかの検証を行う。また、マッチング再構成により、異なるマッチングへの遷移について考察する。最後に、5節でまとめを行う。

## 2 安定結婚問題

本節では、以下の議論に必要な分散安定結婚問題の基礎となっている安定結婚問題につ

いて説明を行う。

安定結婚問題では、要素数  $n$  の 2 つの集合、男性グループ  $m$ 、女性グループ  $w$  が与えられる。

$$m = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}, \\ w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

このとき、男性グループに属するメンバーを男性メンバーと呼び、女性グループに属するメンバーを女性メンバーと呼ぶ。また、任意のグループに属するメンバー  $p$  を考えるとき、 $p$  と同じグループに属するメンバーを  $p$  の同性メンバー、異なるグループに属するメンバーを  $p$  の異性メンバーと呼ぶ。

男性グループ及び女性グループに属する各メンバーは、異性のグループに含まれる全てのメンバーを厳密に順位付けしたリスト (Preference List: 以後 PL) を持っている。このとき、任意のメンバー  $p$  と、 $p$  の異性メンバーである  $q$ 、 $r$  について、 $p$  の PL において  $q$  が  $r$  より上位にランクされるとき、 $p$  は  $r$  より  $q$  を好むと言い、次のように表現する。

$$PL\ p(q) < PL\ p(r)$$

マッチング  $M$  とは、男女のペア  $(m, w)$ ,  $m \in m, w \in w$  の集合

$$M = \{(m, w) | m \in m, w \in w\}, |M| = n$$

で、各メンバーは  $M$  中にたかだか 1 回しか出現しない。このとき、安定マッチングを次の様に定義する。

定義 1<sup>[1]</sup> マッチング  $M$  に含まれる 2 つのペア  $(m_i, w_i)$ ,  $(m_j, w_j)$  において

$$m_i \text{ は } w_i \text{ より } w_j \text{ を好む、且つ} \\ w_j \text{ は } m_j \text{ より } m_i \text{ を好む}$$

が成立するとき、これらは不安定なペアという。マッチング  $M$  内の、任意の 2 つのペアが不安定でないとき、「 $M$  は安定なマッチングである」という。

安定結婚問題において、与えられた問題例 (男性グループ、女性グループ及びそれぞれに属するメンバーの PL) には少なくとも一つの安定マッチングが存在する<sup>[2]</sup>。一般に、与えられた例題には複数の安定マッチングが存在し、最も多い場合、その例題における集合の要素数の指数オーダー存在することが知られている<sup>[2]</sup>。D. Gale と L. Shapley の提案した Gale-Shapley 基本アルゴリズム<sup>[1]</sup>によって、与えられた例題における安定マッチングを求めることが可能である。

### 3 分散安定結婚問題

本節では、安定結婚問題を分散システムへ適用した分散安定結婚問題について述べる。

### 3.1 分散 Gale-Shapley アルゴリズム

安定結婚問題を分散システムへ適用する前に、本論文で想定する分散システムを次の様に定義する。

1. 任意の分散要素間で相互に通信できる非同期システムとする。
2. 分散要素内の全ての命令は有限時間内で終了するものとする。
3. 通信遅延は有限である。

安定マッチング問題における各メンバーを、上記のような分散システムにおける分散要素（ノード）と捉えることにより、分散システムへ安定マッチング問題を適用する。

本論文で定義する分散安定マッチング問題とは、上記のような分散システムにおいて、有限回のメッセージ通信と有限時間の計算で、次に示す初期状態から最終状態へ導くアルゴリズムを求める問題をいう。

【初期状態】 各メンバーは男性グループと女性グループの2グループのいずれかに所属していて、他の全てのメンバーの識別子（ID）と所属しているグループを知っている。また、各プロセスは、自己の PL のみ持っている。

【最終状態】 各メンバーは、自分のパートナーを知っている。この時、分散システム全体として各メンバーの組み合わせは安定なマッチングとなっている。

分散安定マッチング問題を解く分散アルゴリズムとして、Gale-Shapley 基本アルゴリズムを基にした分散 Gale-Shapley アルゴリズムを提案した<sup>[7]</sup>。この分散アルゴリズムにおいては、メンバー間で次のメッセージの送受信を行う。

**Propose:** 送信者の受信者に対するパートナー要請を意味する。

**Accept:** 送信者が受信者のパートナー要請を受諾したことを意味する。

**Reject:** 送信者が受信者のパートナー要請を断わったことを意味する。

**Proposed:** 送信者がパートナー要請されたことを受信者に対し伝える。

また、提案アルゴリズムにおいては、メッセージは次のコマンドにより送受信される。

**Send** ( $p$ , Mes): メッセージ Mes を  $p$  へ送る。

**Receive** ( $p$ , Mes):  $p$  からのメッセージ Mes を受け取る。

図 1 に、分散 Gale-Shapley アルゴリズムを示す。

分散 Gale-Shapley アルゴリズムは、もととなる Gale-Shapley 基本アルゴリズムと同様の性質をもっている。つまり、男性メンバーが Propose を行い、女性メンバーがそれを受けるとき、得られる安定マッチングは、男性優先安定マッチングとなる。

### 3.2 マッチング再構成

分散 Gale-Shapley アルゴリズムで得られる安定マッチングは、男性優先解もしくは女

**procedure** MAN

**begin**

**loop**

$w :=$  the  $i$ -th member of PL;

Send ( $w$ , Propose);

Receive ( $w$ , Mes);

**case** Mes **is**

**when** Reject:  $i = i + 1$ ;

**when** Accept: break the loop;

**end case**;

**end loop**;

partner: =  $w$ ;

**end.**

**procedure** WOMAN **is**

**begin**

$m :=$  null;

**loop**

Receive ( $p$ , Mes);

**case** Mes **is**

**when** Propose:

**if**  $m :=$  null **then**

$m := p$ ;

Send (every woman who participates, Proposed);

**else if** prefer  $p$  to  $m$  **then**

Send ( $m$ , Reject);

$m := p$ ;

**else**

Send ( $p$ , Reject);

**end if**;

**when** Proposed:

**if** received Proposed from every woman **then**

Send ( $m$ , Accept); break the loop;

**end if**;

**end case**;

**end loop**;

partner: =  $m$ ;

**end.**

図1 分散 Gale-Shapley アルゴリズム

性優先解という、一方のグループのメンバーにとって最良で、もう一方のグループのメンバーにとって最悪となる性質をもっている。その様な安定マッチングでは、パートナーに対し不満を持ち、より良いパートナーを望むメンバーが存在することが考えられる。本節では、安定マッチングから異なる安定マッチングへ導くマッチングの再構成手法について述べる。まず、マッチング再構成の手法を定義する。

**定義 2** 任意の安定マッチング  $M$  において、メンバー  $p$  が、現在のパートナーに対し Reject メッセージを送信し、各メンバーが分散 Gale-Shapley アルゴリズムに基づいた行動をとるとき、 $M$  とは異なる安定マッチングへ導かれる。この手法をマッチング再構成と呼ぶ。このときのパートナー交換の実行過程を再構成プロセスと呼び、 $mrp_M^p$  と表現する。また、 $p$  を  $mrp_M^p$  の起動者という。

メンバー  $p$  が、安定マッチング  $M$  におけるパートナーに対し自律的に Reject メッセージを送信したとき、再構成プロセスが起動されたという。再構成プロセスによるパートナー交換の結果、起動者  $p$  が新たなパートナーを得た場合、起動前とは異なる安定マッチングへ導かれている。このとき再構成プロセスは成功したという。一方、PL の最下位の異性メンバーから Reject メッセージを受信し、これ以上 Propose メッセージを送信する相手がないメンバーが現れた場合、起動者は新たなパートナーを得ることができず、この場合、起動前とは異なる安定マッチングへ導けなかったことになり、再構成プロセスは失敗したという<sup>[7]</sup>。

**定義 3** マッチング再構成において、「一つの再構成プロセスによるパートナー交換が実行中であれば、異なる再構成プロセスを起動できない」と仮定するとき、このマッチング再構成を単一マッチング再構成と呼ぶ。

**定理 1**<sup>[7]</sup> 単一マッチング再構成は、起動者が最良のパートナー（起動者が男性であれば男性優先安定マッチングにおけるパートナー）以外のメンバーに対し起動された場合、異なる安定マッチングへ導く。

## 4 パートナーとして許容できないメンバーを許す分散安定結婚問題の考察

本節では、分散安定結婚問題の問題例において、パートナーとして受け入れることが困難なメンバーを希望リストから除くことを許容した場合について、分散 Gale-Shapley アルゴリズムによって安定マッチングを得ることができるかどうかと、マッチング再構成が可能かどうかについて検討を行う。

### 4.1 分散 Gale-Shapley アルゴリズムの考察

安定結婚問題では、PL に異なるグループのメンバー  $n$  人全員を記入しなければならない。さらに、その  $n$  人は完全に順序付けられ同順位が無いようにしなければならないとい

う制約が設けられている。しかしながら、実際的な応用を考えた場合、異性の中にパートナーとして受け入れることが困難なメンバーが存在する場合や、明確な順位付けが困難な場合が考えられる。これらのケースは、一般に、メンバーの数が増えれば増える程、発生する可能性が高くなり、制約を遵守したPLの記入は困難となる。安定結婚問題においては、パートナーとして受け入れることが困難なメンバーをPLに記入しないことを許した場合について検討されており、安定マッチングを導くことができることが知られている<sup>[2]</sup>。

本節では、分散安定結婚問題において、パートナーとして受け入れることが困難なメンバーをPLに記入しないことを許した場合について検討を行う。

任意のメンバー  $p$  が、パートナーとして受け入れることのできない異性メンバーが1人以上いると仮定し、パートナーとして受け入れることができないメンバーをPLに記入しなくても良いことを許容することを想定する。この設定は、例えば、任意のメンバー  $q$  が、すべての異性メンバーからパートナーとして受け入れられない場合も起こりえることから、各グループのメンバーが  $n$  人であった場合、マッチングが  $m$  組 ( $m \leq n$ ) のペアから構成されても良いとする必要がある。このとき、安定マッチングを次のように再定義する。

**定義 4<sup>[2]</sup>** マッチング  $M$  に含まれないペア  $(m, w)$  において、

1.  $m$  と  $w$  はペアでなく、且つ、互いにパートナーとして受け入れ可能である
2.  $m$  はパートナーがいない (マッチングしていない)、もしくは、パートナーより  $w$  を好む
3.  $w$  はパートナーがいない、もしくは、パートナーより  $m$  を好む

のすべての条件を満たす場合、マッチング  $M$  は不安定であるという。マッチング  $M$  に含まれない、任意のペアにおいて、マッチングが不安定でないとき、「 $M$  は安定なマッチングである」という。

マッチングがすべてのメンバーから構成されなくてもよいことから、下記の定理が導かれる。

**定理 2** 分散 Gale-Shapley アルゴリズムは、パートナーとして受け入れることができないメンバーをPLに記入しないことを許した分散安定結婚問題において、安定マッチングへ導く。

**証明** パートナーとして受け入れられないメンバーを許した分散安定結婚問題において、分散 Gale-Shapley アルゴリズムは、Gale-Shapley 基本アルゴリズム同様、任意の男性メンバー  $m_i$  (女性メンバー  $w_i$ ) は、好ましい異性メンバーへ Propose メッセージを送信する。受信した女性メンバー  $w_j$  (男性メンバー  $m_j$ ) が Reject メッセージを返信するのは、

1.  $m_i(w_i)$  より好ましい異性メンバーから Propose メッセージを受信した (受信している) 場合

## 2. $w_j(m_j)$ の PL に $m_i(w_i)$ が記入されていない場合

のいずれかである。いずれの場合においても、定義4の不安定なマッチングとなることがないことから、全メンバーを含む安定マッチングが存在しない場合はあるが、分散 Gale-Shapley アルゴリズムは、安定マッチングを得ることができる。□

### 4.2 マッチング再構成の考察

本節では、パートナーとして受け入れることが困難なメンバーを PL に記入しないことを許した場合のマッチング再構成による安定マッチング  $M$  から異なる安定マッチング  $M'$  への遷移について考察する。

メンバー  $p$  が、安定マッチング  $M$  におけるパートナーに対し自律的に Reject メッセージを送信したとき、再構成プロセスが起動されたという。再構成プロセスによるパートナー交換の結果、起動者  $p$  が新たなパートナーを得た場合、起動前とは異なる安定マッチングへ導かれている。このとき再構成プロセスは成功したという。一方、PL の最下位の異性メンバーから Reject メッセージを受信し、これ以上 Propose メッセージを送信する相手がいないメンバーが現れた場合、起動者は新たなパートナーを得ることができず、この場合、起動前とは異なる安定マッチングへ導けなかったことになり、再構成プロセスは失敗したという<sup>[7]</sup>。

**定理 3** パートナーとして受け入れることが困難なメンバーを PL に記入しないことを許した分散安定結婚問題において、単一マッチング再構成により導かれたマッチングに、遷移前のマッチングでパートナーの存在しなかったメンバーが含まれる場合、遷移したマッチングは不安定である。

**証明** 男性優先解において、パートナーの存在しない男性メンバー  $p$  は、全ての女性メンバーから Reject メッセージを受信していることから、その問題例においてパートナーを得ることができない。一方で、パートナーの存在しない女性メンバー  $q$  が、マッチング再構成によりパートナーを得た場合、遷移前のマッチングでパートナーを得ていたメンバーで、パートナーを失うメンバー  $r$  が存在する。この場合、 $q$  のパートナーとなったメンバーは  $q$  よりも  $r$  を好むことから不安定となる。□

## 5 結び

本稿では、分散安定結婚問題において、パートナーとして受け入れられないメンバーを記入しない PL を認めた場合に、分散 Gale-Shapley アルゴリズムで安定結婚問題を得ることができるかと、安定マッチングから異なる安定マッチングへ遷移するマッチング再構成について考察した。結果として、分散 Gale-Shapley アルゴリズムにより安定マッチングを得ることができることを示した。また、マッチング再構成手法により、遷移したマッチングが不安定となるケースについて示した。

今後の課題として、パートナーとして許容できないメンバーを PL に記入しない事を許



した場合に、異なる安定マッチングへ遷移する手法について検討を行う。また、PLにおいて同順位を認める（同順位リスト）制約の緩和についての考察と、同順位リストとパートナーとして許容できないメンバーを同時に許した場合の分散安定結婚問題について研究していく予定である。

## 参考文献

- [1] D. Gale and L.S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage," American Mathematical Monthly, Vol.69, pp.9-15, 1962.
- [2] D. Gusfield and R. W. Irving, 'The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms,' The MIT press. 1989.
- [3] 油田信一, "複数の自律移動ロボットの協調行動," 日本ロボット学会, Vol.10, No.4, pp. 433-438, 1992.
- [4] 大里延康, "分散協調システムー分散 AI・並行オブジェクト・人工生命ー," 日本ロボット学会誌, Vol. 10, No.4, pp.450-456, 1992.
- [5] 浅間一, 尾崎功一, 松元明弘, 石田慶樹, 遠藤勲, "通信を用いた分散的管理に基づく複数の自律移動ロボットの協調作業分担決定手法," 日本ロボット学会誌, Vol.10, No.4, pp.955-963, 1992.
- [6] H. Kinjo, M. Nakamura, and K. Onaga, "Distributed Stable Marriage of Autonomous Mobile Robots and Battery Charger Station," IEICE Trans. on Fundamentals, Vol. E79-A, No.11, pp.1856-1859, 1996.
- [7] H. Kinjo, M. Nakamura, and K. Onaga, "Autonomous Mechanism for Partner Exchanging in Distributed Stable Marriage Problem," IEICE Trans. on Fundamentals, Vol. E80-A, No.6, pp.1040-1048, 1997.
- [8] 金城秀樹, 名嘉村盛和, 翁長健治, "分散安定結婚問題における二並行マッチング再構成," 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.99, No.539, pp.77-84, 2000.
- [9] K. Iwama, D. Manlove, S. Miyazaki, Y. Morita, "Stable Marriage with Incomplete Lists and Ties," Proc. ICALP99, pp.443-452, 1999.